USPOŘÁDÁNÍ A SVAZY

Definice Buď M množina. Relace ρ na M se nazývá

1. REFLEXIVNÍ, platí-li $a\rho a \ \forall a \in M$,
2. ANTISYMETRICKÁ, platí-li $a\rho b,\ b\rho a \Rightarrow a = b$,
3. TRANZITIVNÍ, platí-li $a\rho b,\ b\rho c \Rightarrow a\rho c$.

Relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, se nazývá USPOŘÁDÁNÍ. Dvojice (M, ρ) se nazývá USPOŘÁDANÁ MNOŽINA.

Př.: 0) (M, id_M)

1) $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ...

2) množina M, $P(M)$ množina všech podmnožin M.
   Inkluse $\subseteq$ je uspořádání na $P(M)$.

3) $(\mathbb{N}, |)$, kde $a|b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : am = b$.

$b \geq a \Leftrightarrow a \leq b$

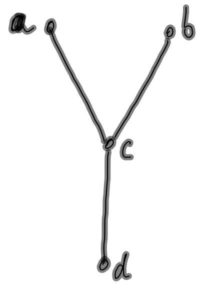
Definice Prvky a,b uspořádané množiny M jsou SROVNATELNÉ, platí-li $a \leq b$ nebo $b \leq a$.

Usp. množina M se nazývá ŘETĚZEC, jsou-li každé dva prvky $a,b \in M$ srovnatelné.

$\leq$ uspořádání, $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$.

$a \lessdot b \iff a < b \wedge \nexists c : a < c, c < b$.

Y



Definice Buď $(M, \leq)$ usp. množina. Prvek $x \in M$ se nazývá

- NEJMENŠÍ, je-li $x \leq a \ \forall a \in M$,
- NEJVĚTŠÍ, je-li $a \leq x \ \forall a \in M$,
- MAXIMÁLNÍ, neexistuje-li $a \in M$ takový, že $a > x$,
- MINIMÁLNÍ, neexistuje-li $a \in M$ takový, že $a < x$.

Definice Buď $A \subseteq M$ podmn. usp. mn. $(M, \leq)$. Prvek $x \in M$ se nazývá

- DOLNÍ ZÁVORA mn. A, je-li $x \leq a \ \forall a \in A$;
- HORNÍ ZÁVORA mn. A, je-li $a \leq x \ \forall a \in A$;
- SUPREMUM mn. A, je-li x nejmenší prvek množiny všech horních závor mn. A, píšeme $x = \sup A$;
- INFIMUM mn. A, je-li x největší prvek množiny všech dolních závor mn. A, píšeme $x = \inf A$.

Př: Y, $\{a,b\}$ dolní závory c, d, $\inf\{a,b\} = c$

horní závory $\emptyset$, $\sup\{a,b\}$ neexistuje.

IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ

Definice Buďte $(M, \leq)$, $(N, \leq)$ usp. množiny.
Zobrazení $f: M \to N$ se nazývá IZOTONNÍ, když platí

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

Je-li zobrazení f bijektivní a f i f^{-1} jsou izotonní, říkáme že f je IZOMORFISMUS uspořádaných množin a že $(M, \leq)$, $(N, \leq)$ jsou IZOMORFNÍ.

Př.: $id: (\mathbb{N}, |) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ je izotonní.

$id: (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{N}, |)$ není izotonní.

SVAZY

Definice Buď $(M, \leq)$ usp. množina. Nechť $\forall x,y \in M$ existuje $\inf\{x,y\}$ a $\sup\{x,y\}$. Pak M je SVAZOVĚ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA.

Př.: $(P(M), \subseteq)$ je svazově uspořádaná.

Tvrzení Buď $(M, \leq)$ svazově usp. mn. Označme

$x \vee y := \sup\{x,y\}$, $x \wedge y := \inf\{x,y\}$.

Pak

$$\begin{aligned} x \vee x &= x & x \wedge x &= x \\ x \vee y &= y \vee x & x \wedge y &= y \wedge x \\ x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z & x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \wedge x) &= x & x \wedge (y \vee x) &= x \end{aligned} \qquad (*)$$

pro lib. $x, y, z \in M$.

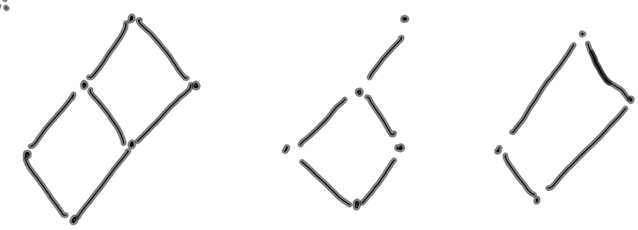
Definice Algebraická struktura $(M, \wedge, \vee)$ se dvěma binárními operacemi $\wedge$ a $\vee$ se nazývá SVAZ, jestliže jsou splněny podmínky $(*)$. $\wedge$ je PRŮSEK, $\vee$ je SPOJENÍ.

Tvrzení Pro každé tři prvky x, a, b svazu L platí

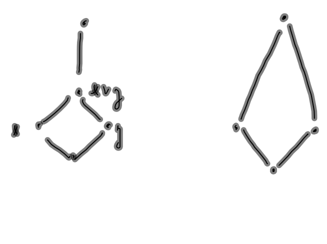
1. jestliže $a \leq b$, pak $a \wedge x \leq b \wedge x$,
2. jestliže $a \leq b$, pak $a \vee x \leq b \vee x$,
3. jestliže $x \leq a$, $x \leq b$, pak $x \leq a \wedge b$,
4. jestliže $x \geq a$, $x \geq b$, pak $x \geq a \vee b$.

Definice PODSVAZ svazu $(M, \wedge, \vee)$ je podmnožina $A \subseteq M$ taková, že $\forall x,y \in A$ platí $x \wedge y \in A$, $x \vee y \in A$.

Př.:



Př.:



je svaz ale není podsvaz.

<u>Definice</u> Buďte $(X, \wedge, \vee)$, $(Y, \wedge, \vee)$ svazy. Zobrazení $f: X \to Y$ se nazývá HOMOMORFISMUS svazů, jestliže

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \quad \forall a, b \in X.$$

<u>Tvrzení</u> Každý homomorfismus svazů je izotonní zobrazení.

<u>Důkaz</u> Buď $f: X \to Y$ homomorfismus svazů. Nechť $a, b \in X$ a nechť $a \leq b$, takže $a \wedge b = a$. Pak $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(a)$ $\Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow f$ je izotonní.

<u>Definice</u> Buď L svaz. L je ÚPLNÝ, má-li každá podmnožina v L supremum i infimum.

Každý úplný svaz L má největší prvek $\sup L$ i nejmenší prvek $\inf L$.

<u>Tvrzení</u> Buď L usp. množina, jejíž každá podmnožina má infimum. Pak L je úplný svaz.